《$0 \leqq x \leqq 1$ でない積分 (B10) ☆》

1. 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{k^2+3kn+2n^2}$ を求めよ.

（20　電気通信大）

考え方　$0 \leqq x \leqq 1$ の積分でなく，$1 \leqq x \leqq 2$ の積分になる．一般区間の区分求積でも動揺しないようにしておきたい．

▶解答◀　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{k^2+3kn+2n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+3\cdot\frac{k}{n}+2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_1^2\frac{1}{x^2+3x+2}\,dx=\int_1^2\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=\Big[\log\frac{x+1}{x+2}\Big]_1^2=\log\frac{3}{4}-\log\frac{2}{3}=\boldsymbol{\log\frac{9}{8}}$$

注意　$x=\dfrac{k}{n}$ を分点とする区分求積を考える．$k=n+1, \cdots, 2n$ で動かすとき
$x=\dfrac{n+1}{n},\ \dfrac{n+2}{n},\ \dfrac{n+3}{n},\ \cdots,\ \dfrac{2n}{n}$ と動き，x の微小変化量 $dx=\dfrac{1}{n}$ であり，区間 $1+\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq 2$ は $n\to\infty$ のとき $1 \leqq x \leqq 2$ になる．だから
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+3\cdot\frac{k}{n}+2}\cdot\frac{1}{n}$ は
$\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$ になる．