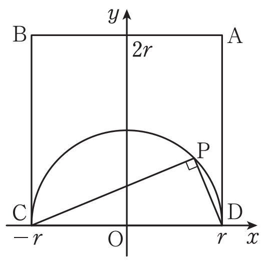
1 正方形ABCDの内部の点Pに対して$\angle$CPDが直角であるとき，$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}$ の最大値を求めよ．

（16　愛媛大・医）

1 数学Ⅲ【最大値・最小値】標準

▶解答◀　正方形の1辺の長さを$2r$とし，図のように座標を定める．$\angle\mathrm{CPD}=90^\circ$ だからPは半円$x^2+y^2=r^2$, $y>0$ 上にある．



$x>0$のときは

$$\mathrm{BP}>\mathrm{AP}\qquad \therefore\ \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}>1$$

$x\leqq 0$のときは $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}\leqq 1$ だから最大を考える場合，$0<x<r$で考える．

$$\mathrm{AP}^2=(x-r)^2+(y-2r)^2$$
$$=x^2+y^2-2rx-4ry+5r^2$$
$$=r^2-2rx-4ry+5r^2=6r^2-2rx-4ry$$

同様に

$$\mathrm{BP}^2=(x+r)^2+(y-2r)^2=6r^2+2rx-4ry$$

となる．

$$\frac{\mathrm{BP}^2}{\mathrm{AP}^2}=\frac{3r+x-2y}{3r-x-2y}$$

ここで$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．さらに$c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$と略記する．

$$\frac{\mathrm{BP}^2}{\mathrm{AP}^2}=\frac{3+c-2s}{3-c-2s}=f(\theta)$$

とおく．$f'(\theta)$の分母は$(3-c-2s)^2$で，分子は

$$(-s-2c)(3-c-2s)-(3+c-2s)(s-2c)$$
$$=3(-s-2c)-3(s-2c)$$
$$+(s+2c)(c+2s)+(c-2s)(2c-s)$$
$$=4-6s=2(2-3s)$$

となる．$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ として次のように増減し，$f(\theta)$は$\theta=\alpha$で最大になる．

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$f(\alpha)=\frac{3+\cos\alpha-2\sin\alpha}{3-\cos\alpha-2\sin\alpha}$$

$$=\frac{3+\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{4}{3}}{3-\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}$$

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=\sqrt{f(\theta)}$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$ である．

注意　直線$3r+x-2y=t(3r-x-2y)$が四分円$x^2+y^2=1$と第一象限で接する条件から求めることもできる．