《普通の帰納法だが 3 つ飛ばし》

1. i を虚数単位とし，複素数 a_n を

$$a_1=-1,\ a_{n+1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_n+\sqrt{3}i$$
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

によって定める．また，複素数 b_n を

$$b_1=1,\ b_{n+1}=a_nb_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ．

（2） すべての正の整数 n について $a_{n+3}=a_n$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

（3） b_n を求めよ． （20 琉球大・前期）

▶解答◀ （**1**） $a_1=-1$

$$a_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_1+\sqrt{3}i$$
$$=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{2}i=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}$$
$$a_3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_2+\sqrt{3}i$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\sqrt{3}i$$
$$=\frac{-1-3}{4}+\sqrt{3}i=\boldsymbol{-1+\sqrt{3}i}$$
$$a_4=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_3+\sqrt{3}i$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1+\sqrt{3}i)+\sqrt{3}i$$
$$=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{2}+\sqrt{3}i=\boldsymbol{-1}$$

（**2**） $n=1$ のとき，（1）より $a_4=a_1$ であるから成り立つ．$n=k$ のとき成り立つとする．$a_{k+3}=a_k$ である．

$$a_{k+4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_{k+3}+\sqrt{3}i$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_k+\sqrt{3}i=a_{k+1}$$

$n=k+1$ でも成り立つから数学的帰納法により証明された．

（**3**） $b_1=1$

$$b_2=a_1b_1=(-1)\cdot1=-1$$
$$b_3=a_2\cdot b_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1)$$
$$b_{n+3}=a_{n+2}b_{n+2}=a_{n+2}a_{n+1}b_{n+1}$$
$$=a_{n+2}a_{n+1}a_nb_n$$

（2）より数列 $\{a_n\}$ は $-1,\ \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\ -1+\sqrt{3}i$ を繰り返す周期 3 の周期数列である．数列 $\{a_n\}$ の連続する 3 つの積は

$$a_{n+2}a_{n+1}a_n=-1\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1+\sqrt{3}i)$$
$$=-1\cdot\frac{-1-3}{2}=2$$

となるから $b_{n+3}=2b_n$ である．

n が 3 の倍数のとき，b_3 から b_n に進む場合，添え字は $n-3$ 増えるが，その間のステップ数は $\dfrac{n-3}{3}$ であり，公比が $\dfrac{n-3}{3}$ 回掛かる．

$$b_n=b_3\cdot2^{\frac{n-3}{3}}=\boldsymbol{-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot2^{\frac{n-3}{3}}}$$

n が 3 で割った余りが 1 のとき，

$$b_n=b_1\cdot2^{\frac{n-1}{3}}=\boldsymbol{2^{\frac{n-1}{3}}}$$

n が 3 で割った余りが 2 のとき，

$$b_n=b_2\cdot2^{\frac{n-2}{3}}=\boldsymbol{-2^{\frac{n-2}{3}}}$$