2 $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}\ (0 \leqq x \leqq 1)$ とする．

（１） $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を求めよ．

（２） xy 平面において，曲線 $y=f(x)\ (0 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

（21　愛知工大・工）

2

数学Ⅲ【面積】標 準

▶解答◀ （**1**） $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$

$$f'(x)=2x\sqrt{1-x^2}+x^2\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{2x(1-x^2)-x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{2x-3x^3}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから，$f(x)$ は以下のように増減する．

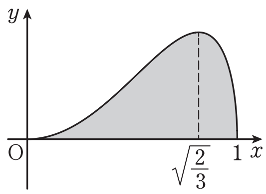
x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

$f(x)$ の最大値は

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

（**2**） $x=\sin\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおく．

$x : 0 \to 1$ のとき $\theta : 0 \to \frac{\pi}{2}$ で，$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$ であるから，$dx=\cos\theta\, d\theta$ である．$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ において $\cos\theta \geqq 0$ である．求める面積は



$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)\,d\theta$$

$$=\left[\frac{\theta}{8}-\frac{1}{32}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{16}}$$