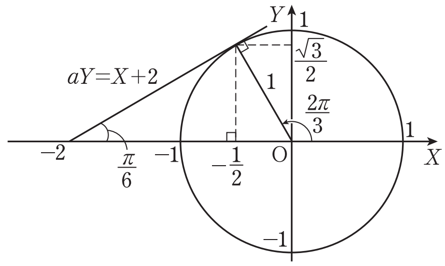
（3） $0 \leqq x < 2\pi$ において，2つの曲線 $y = a\sin x$, $y = \cos x + 2$ がただ1つの共有点Pをもつとき，正の定数 a の値と点Pの座標を求めよ．（21　広島工業大）

（3） 数学Ⅱ【三角関数と方程式】標準

▶解答◀ 2式を連立させ $a\sin x = \cos x + 2$ ……①となる．$X = \cos x$, $Y = \sin x$ とおくと点 (X, Y) は円 $X^2 + Y^2 = 1$ と直線 $aY = X + 2$ の共有点である．それがただ1つになるのは，図のように接するときであり，そのとき $x = \dfrac{2\pi}{3}$ である．$a\sin x = \cos x + 2$ に代入し $a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}$ であるから，$a = \boldsymbol{\sqrt{3}}$ となる．なお，a は直線 $aY = X + 2$ の傾きではなく傾きの逆数だから，錯覚しないように．$\mathrm{P} = (x, \cos x + 2) = \left(\boldsymbol{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3}{2}}\right)$



◆別解◆ ①は $\cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{1+a^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ （α は鈍角）として $\sqrt{1+a^2}\cos(x - \alpha) = 2$ と合成できる．これを満たす x $(0 \leqq x < 2\pi)$ がただ1つ存在する条件は $\sqrt{1+a^2} = 2$ であり，$a = \boldsymbol{\sqrt{3}}$ となる．そのとき $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で $x = \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ （後略）