2 △ABC の外心を O，垂心を H とするとき，下の問いに答えよ．ただし，三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わり，その点を三角形の垂心という．

（1） 等式 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が成り立つことを示せ．

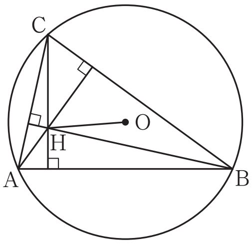
（2） 等式 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{(2+\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3+2\sqrt{3}}$ が成り立つような ∠A の大きさを求めよ．

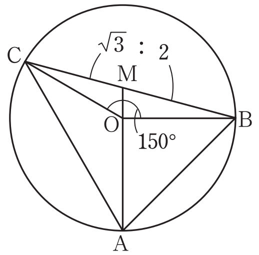
（21 東京学芸大・前期）

2 数学B【ベクトルと図形（平面）】標準

▶解答◀ （**1**） $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ である．

$$(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}))\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-(\vec{b}+\vec{c}))\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}-(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$
$$=0+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2=0 \quad\cdots\cdots①$$





同様にして，$(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}))\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0$ ⋯⋯②

一般に，平面上の 1 次独立な 2 つのベクトル $\vec{p},\ \vec{q}$ に対して，平面ベクトル $\vec{x}$ が

$$\vec{x}\cdot\vec{p}=0,\ \vec{x}\cdot\vec{q}=0$$

を満たすとき $\vec{x}=\vec{0}$ であるから，①，② より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ が成り立つ．

（**2**） $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{(2+\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3+2\sqrt{3}}$

$$(3+2\sqrt{3})(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=(2+\sqrt{3})\vec{a}+\sqrt{3}\,\vec{b}+\vec{c}$$
$$(1+\sqrt{3})\vec{a}+(3+\sqrt{3})\vec{b}+(2+2\sqrt{3})\vec{c}=\vec{0}$$
$$\vec{a}+\sqrt{3}\,\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$$
$$|\sqrt{3}\,\vec{b}+2\vec{c}|^2=|-\vec{a}|^2$$
$$3|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2+4\sqrt{3}\,\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2$$
$$3|\vec{b}|^2+4|\vec{b}|^2+4\sqrt{3}|\vec{b}|^2\cos\angle\mathrm{BOC}=|\vec{b}|^2$$
$$\cos\angle\mathrm{BOC}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\angle\mathrm{BOC}=150^\circ$$

ここで，$\vec{a}=-\sqrt{3}\,\vec{b}-2\vec{c}$ より

$$-\frac{\vec{a}}{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\,\vec{b}+2\vec{c}}{2+\sqrt{3}}$$

となり，BC を $2:\sqrt{3}$ に内分する点を M とすると $-\dfrac{\vec{a}}{2+\sqrt{3}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ が成り立つから，M，O，A の順にあり，O は三角形 ABC の内部にある．円周角の定理より，$\angle\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}=$ **75°**