（３） 虚部が正である複素数 α について，$\dfrac{\alpha^2}{\alpha+2}$，$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+4}$ はともに実数であるとする．このとき，$\alpha=\boxed{}$ である．

（23 芝浦工大）

（３） 数学Ⅲ【複素数平面】標準

▶解答◀ $\dfrac{\alpha^2}{\alpha+2}$ が実数であるから

$$\frac{\alpha^2}{\alpha+2}=\frac{\overline{\alpha}^2}{\overline{\alpha}+2}$$

$$\alpha^2\overline{\alpha}+2\alpha^2-\alpha\overline{\alpha}^2-2\overline{\alpha}^2=0$$

$$\alpha\overline{\alpha}(\alpha-\overline{\alpha})+2(\alpha-\overline{\alpha})(\alpha+\overline{\alpha})=0$$

α は虚数だから $\alpha-\overline{\alpha}\neq 0$ で割って

$$\alpha\overline{\alpha}+2(\alpha+\overline{\alpha})=0 \quad \cdots\cdots①$$

次に $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+4}$ が実数であるから

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+4}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}^2+4}$$

$$\alpha\overline{\alpha}^2+4\alpha-\alpha^2\overline{\alpha}-4\overline{\alpha}=0$$

$$\alpha\overline{\alpha}(\overline{\alpha}-\alpha)-4(\overline{\alpha}-\alpha)=0$$

$\overline{\alpha}-\alpha\neq 0$ で割り，$\alpha\overline{\alpha}=4$ となる．① と合わせて

$$\alpha\overline{\alpha}=4,\ \alpha+\overline{\alpha}=-2$$

$\alpha=x+yi$（x, y は実数，$y>0$）とおくと

$$x^2+y^2=4,\ 2x=-2$$

$x=-1$, $y=\sqrt{3}$ であり，$\alpha=\boldsymbol{-1+\sqrt{3}i}$ である．